

多机器人协作焊接系统初始焊接位置选取及最优轨迹规划

潘建龙^{1,2}, 甘亚辉^{1,2}, 陈明^{1,2}, 戴先中^{1,2}

1. 东南大学 自动化学院, 南京 210096

E-mail: jianlong_pan@seu.edu.cn

2. 复杂工程系统测量与控制教育部重点实验室, 南京 210096

E-mail: ganyahui@yeah.net

摘要:为解决多机器人协作焊接中人工示教的局限性, 针对协作机器人作业过程中的运动学约束及运动灵活性, 本文提出了求取具备全局最优灵活性的初始焊接位置及对应的最优机器人运动轨迹的方法. 本文首先分析了多机器人协作时不同机器人之间的运动学关系, 并基于此提出了多机器人协作系统的可操作度评价方法, 进一步构建优化目标函数, 考虑多机器人碰撞、奇异位形等约束条件, 采用遗传算法在多机器人协作空间中求取使系统全局可操作度最优的初始焊接位置和运动轨迹, 并将得到的结果在构建的Matlab-SimMechanics多机器人仿真平台上运行. 求取的结果和实验表明, 算法选择的初始焊接位置和相应的运动轨迹结果能使多机器人协作系统可操作度最大, 同时满足各项运动学限制.

关键词: 多机器人协作, 初始焊接位置, 可操作度, 运动规划

Initial Welding Point Selection and Optimal Trajectory Planning for Multi-Robots Cooperative Welding Systems

Pan Jianlong^{1,2}, Gan Yahui^{1,2}, Chen Ming^{1,2}, Dai Xianzhong^{1,2}

1. School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096

E-mail: jianlong_pan@seu.edu.cn

2. Key Laboratory of Measurement and Control of Complex Systems of Engineering, Ministry of Education, Nanjing 210096, China

E-mail: ganyahui@yeah.net

Abstract: To eliminate the shortcomings of manual teaching in the multiple robots cooperative systems for welding, a calculation method for the initial welding point satisfying the global optimal flexibility and the corresponding manipulability-optimal trajectory is proposed based on the kinematics constraint and dexterity. Firstly, the motion constrained relations for multi-robots cooperation is analyzed, then a manipulability evaluation model of multi-robots cooperation systems is put forward. Secondly, the global optimal manipulability is adopted as optimization criteria with the constraint conditions such as collision and singularity. Next, genetic algorithm is used to obtain the optimal solution of the model in the global task space of multi-robots cooperation systems. Finally, a Matlab-SimMechanics multi-robots simulation platform is developed to verify the correctness and practicability of results. The results of solution and simulation show that, the selected initial welding point and corresponding robots trajectory maximize the manipulability of multi-robots cooperative system subject to the constraint conditions.

Key Words: Multi-Robots Cooperative Systems, Initial Welding Point, Manipulability, Motion Planning

1 引言

多机器人协作系统是当前工业机器人应用的一个重要发展方向, 相对于单个机器人, 多机器人协作系统具有更强的作业能力, 更大的工作空间, 更灵活的系统结构和组织方式. 然而在当前工业现场及对多机器人协作焊接系统的研究中, 整个协作过程中各个机器人摆放位置、初始焊接位置均为通过人工示教的

方式指定, 不能保证有最佳的协作工作空间和不同机器人之间合理的任务分配^[1]. 人工示教的方式完全依赖于人的经验, 初始焊接位置选择的不好有可能无法规划出完整的焊接运动轨迹. 本文的主要目的在于提出多机器人协作系统的可操作度能评价指标来衡量轨迹规划是否合理, 并针对协作焊接过程中的初始位置选取建立一种自动规划方法, 保证多机器人协作系统整个工作过程性能最优, 同时有效规避碰撞和机器人奇异状态^[2].

使用可操作度椭圆评价机器人的运动灵活性最初由Yoshikawa在文[3]中提出, 并以此对冗余度机器人关节位形进行优化, 文[4]将基于可操作度的性能指

*此项工作得到国家自然科学基金资助, 项目批准号: 61503076, 61175113, 得到江苏省自然科学基金资助, 项目批准号: BK20150624, 得到复杂工程系统测量与控制教育部重点实验室开放课题资助, 项目批准号: MCCSE2014B02.

标扩展到了多机械臂,多机器人的可操作度定义了多机器人系统整体的关节空间到任务空间的速度和力传递性能^[5].后来不同学者相继提出了衡量不同机器人的多种灵活性指标^[6-8],如基于雅克比矩阵、Hessian矩阵、刚度矩阵等的研究,但这些评价准则可以用在冗余关节机器人上,却不能反映针对焊接工业应用场合的多机器人协作系统作为一个整体对其全局协作空间运动和力的转换能力^[9].虽然在文[10]中有提出面向任务的可操作度概念,也只是将其作为一种评价指标,而没有提出完整的轨迹规划方法,因而不能应用在针对某种特定任务的运动规划中^[11].

本文针对多机器人协作系统在焊接工业应用中的运动和控制的特征,提出基于可操作度的系统灵活性评价指标,并以此作为优化函数,考虑多机器人间碰撞,奇异位姿等约束条件,采用遗传算法在多机器人的有效协作工作空间求取焊接任务的初始位置,实现面向特定任务^[6]的最优灵活性轨迹规划.

2 多机器人协作焊接系统模型

2.1 运动学分析

在多机器人协作焊接系统熔化焊接工作过程中,图1所示的搬运机器人与搬运机器人、焊接机器人与搬运机器人之间均存在着一定的运动学约束关系^[12,13],且位姿、速度和加速度的关系直接决定了焊接质量.根据协作机器人末端的运动关系,可以将多机器人协作系统的运动分为叠加与耦合两类^[14].

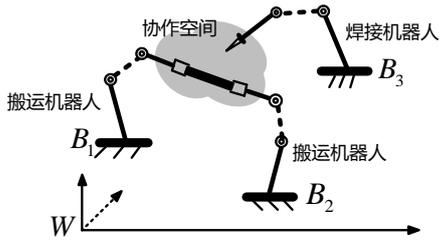


图1: 三机器人协作焊接系统

协作机器人对一个刚体进行共同作业时,如图1所示,协作机器人基座相对位置在工作过程中是固定不变的,即 $\{B_1\}$ 、 $\{B_2\}$ 、 $\{B_3\}$ 固定,则从机器人基坐标系到世界坐标系的齐次变换矩阵 ${}^B_w T$ 为定值.

如图1中三机器人协作焊接系统示意图所示,当进行焊接作业时,多机器人之间存在着两种协调运动关系^[12]:

1) 紧协调:如搬运机器人与搬运机器人之间,机器人与工件间均无相对运动,保持位姿,速度的严格同步,满足

$$\dot{x}_1 = J \cdot \dot{x}_2 \quad (1)$$

2) 松协调:如搬运机器人与焊接机器人之间,满足

$$\dot{x}_1 = J \cdot \dot{x}_2 + \dot{\alpha} \quad (2)$$

与式(1)中紧协调不同的是, $\dot{\alpha}$ 表示焊接机器人和搬运机器人间可以存在着相对运动.

由于机器人末端不断在运动,工件坐标系会不断变化,以世界坐标系 $\{W\}$ 为参考,工件坐标系 $\{C\}$ 表示为:

$${}^w_c T = \begin{bmatrix} {}^w_c R & {}^w p_{C_o} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

在对协作机器人进行任务规划时,选取不同的 ${}^w_c T$,也就是工件坐标系 $\{C\}$ 位于不同位置,得到机器人运动轨迹也是不同的.

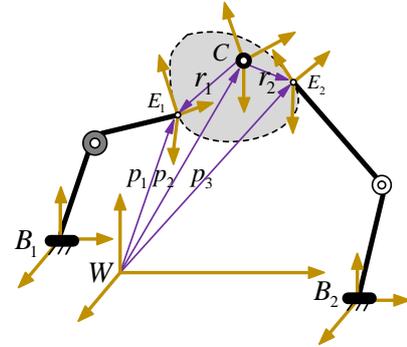


图2: 协作机器人坐标系示意图

在图2中, r_1 , r_2 为以工件坐标系为参考,从其原点至协作机器人末端的向量, p_1 , p_2 , p_3 为在世界坐标系下,工件和协作机器人末端坐标系原点的向量,则有位姿约束关系

$$p_2 + {}^w_c R \cdot r_1 - p_1 = 0 \quad (4)$$

与

$$p_2 + {}^w_c R \cdot r_2 - p_3 = 0 \quad (5)$$

对于已知的特定工件,当规划协作机器人的运动轨迹时,焊点相对于工件坐标系向量为 p_C ,则焊点在世界坐标系下向量为:

$$p_w = {}^w_c T \cdot p_C \quad (6)$$

在机器人基坐标系下向量为:

$$p_B = {}^B_w T \cdot p_C \quad (7)$$

其中:

$${}^B_w T = {}^B_c T \cdot {}^w_c T \quad (8)$$

焊缝的坐标序列 p_C 可以在CAD软件经过离散化再提取得到,如果焊缝曲线是规则简单的,也可以直接计算得到.最终通过式(7)可以得到在机器人基坐标系下的焊缝坐标序列,从而可以调用机器人的正逆运动学运算,得到对应焊缝的机器人关节角度序列.

2.2 灵活性指标

可操作度的研究是机器人机构的重要内容,可操作度指标已被广泛地应用于从机器人手指的运动学

设计到机器人工作空间的工件位置的优化等各个方面^[15],用以改善机器人的传力、传速性能,提高工作效率,节省能量^[16].

2.2.1 单机器人可操作度

机器人的操作空间速度和关节空间速度的线性映射关系,即雅可比矩阵,是关节空间的微分运动向操作空间的微分运动之间的转换矩阵.如式(9)所示, x 为操作空间广义坐标, $x \in R^m$, q 为关节空间广义坐标, $q \in R^n$, J 为雅可比矩阵, $J \in R^{m \times n}$.

$$\dot{x} = J(q)\dot{q} \quad (9)$$

将关节空间中的单位椭球 $\dot{q}^T \dot{q} = 1$ 映射到操作空间中,由(9)式可得操作空间速度可操作度椭球为:

$$\dot{x}^T (JJ^T)^{-1} \dot{x} = 1 \quad (10)$$

其中,椭球的轴长为 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(JJ^T)}$ ($i = 1, 2, \dots$), $\lambda_i(JJ^T)$ 为 JJ^T 的一般特征值.则椭球的体积正比于

$$\omega = \sqrt{\det J(q)J^T(q)} \quad (11)$$

式(11)即为机器人可操作度的定义,其值的大小表现了机器人在操作空间中各个方向传递速度的能力,其实际意义是雅可比矩阵特征值或奇异值的绝对值的乘积,因此某个方向上的可操作度为对应特征向量方向的特征值大小.

2.2.2 多机器人可操作度

多机器人协作系统灵活性描述的是系统整体的传力、传速性能,不同机器人处于不同姿态,速度和力的灵活性也不同,因此必须建立能够表示系统整体可操作度的评价指标数学模型.根据2.1中的分析,满足紧协调关系的两搬运机器人其关节空间与操作空间速度满足

$$\dot{X} = J \cdot \dot{Q} \quad (12)$$

其中

$$\dot{X} = [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2]^T \in R^{2 \times m}, \dot{Q} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T \in R^{2 \times n} \quad (13)$$

因此,两个搬运机器人的广义雅可比矩阵为:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \in R^{12 \times (m+n)} \quad (14)$$

则可得到两个呈紧协调的搬运机器人可操作度 M_{tight} 的定义

$$\begin{aligned} M_{tight} &= \sqrt{\det[JJ^T]} \\ &= \sqrt{\det(J_1 J_1^T) \det(J_2 J_2^T)} \end{aligned} \quad (15)$$

系统中除搬运机器人外,还有负责焊接的机器人,其与搬运机器人呈松协调运动关系,因此单独计算可操作度,三机器人的可操作度椭球如图3所示.

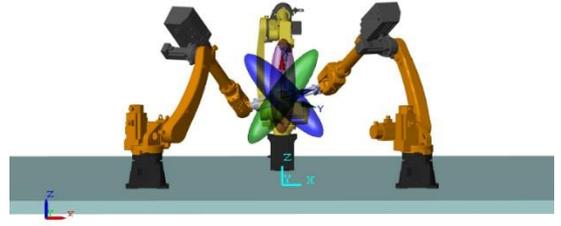


图3: 协作机器人及椭球示意

综合考虑多机器人协作焊接系统中搬运机器人和焊接机器人的灵活性,最终得到多机器人可操作度 MMR (Manipulability of Multi-Robots)为:

$$MMR = \frac{\beta_1 M_{tight}(q_1, q_2) + \beta_2 M_{loose}(q_3)}{\beta_1 + \beta_2} \quad (16)$$

式(15) β_1 中 β_2 和 β_3 表示搬运机器人和焊接机器人在系统灵活性指标中的系数,其值由所有椭球的体积交集大小占各个椭球体积比例来决定,比值越大,权值也就取得越大, M_{tight} 表示系统中具有紧协调运动关系的搬运机器人可操作度, M_{loose} 则为满足松协调关系的焊接机器人可操作度,图4为实际使用三机器人协作系统.



图4: 三机器人协作系统

3 多机器人协作焊接初始位置

3.1 协作轨迹规划策略

对于多机器人协作系统来说,当给定机器人特定任务时,很难通过示教的方式使机器人末端沿着期望轨迹行走,因为要在示教编程过程保证搬运机器人协调运动,且在运动过程中还包含了大量的位姿变换,同时还有焊接机器人对焊缝的跟随,在现实中是不能实现的.只有在单个机器人的情况下,才可以通过示教运动轨迹上大量的空间点来得到机器人合适的末端运动轨迹,在当今大部分的机器人应用现场都是采用的这种方法.但是,对于多机器人系统来说,尤其多机器人系统大多应用到复杂任务的情况下,必须做好离线的协作运动轨迹规划.

对于关节型工业机械臂，当机器人执行某项任务，须通过规划得到对应的一系列机器人关节角度序列 $[\theta_{1,j}, \theta_{2,j}, \theta_{3,j}, \dots, \theta_{m,j}]$ ，其中， m 表示机器人关节数量， $j = 1, 2, \dots, n$ 表示时刻。对于多机器人协作系统来说，则需要计算出对应的多个机器人完成任务需要执行的一系列关节角度。

1) 焊缝曲线离散化

首先应在工件坐标系下进行，将焊缝曲线离散化得到在工件坐标系下坐标序列，可以在CAD软件经过离散化再调用API函数提取得到，或者几何计算得到。

以本文实验中所使用的管管相贯型工件为例，如图5所示，即马鞍形曲线焊缝可看成两个圆管相贯，大圆半径 R_a ，小圆半径 R_b ，焊缝曲线如图6所示。

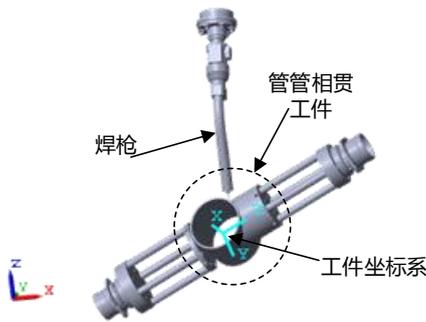


图 5: 管管相贯型工件模型

因此焊点坐标在工件坐标系 $\{C\}$ 下的坐标序列 $p_C(x, y, z)$ 为:

$$\begin{aligned} x &= R_b * \cos(\theta) \\ y &= R_b * \sin(\theta) \\ z &= \sqrt{R_a^2 - R_b^2 * \sin^2(\theta)} \end{aligned} \quad (17)$$

其中， $\theta \in (0, 2\pi)$ 。

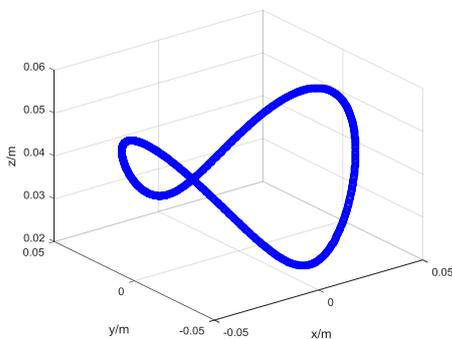


图 6: 管管相贯（马鞍形）焊缝曲线

2) 焊缝曲线的世界坐标

对于特定的初始焊接位置，即工件坐标系原点所在位置，式(6)中 ${}^w_c T$ 为定值，则根据式(6)即可计算出焊缝曲线在世界坐标系下的离散坐标序列。

3) 机器人基坐标系变换

控制机器人运动最终给的是机器人的关节角度序列，需要调用机器人的逆运动学运算得到，因此还需要利用式(7)和式(8)得到在机器人基坐标系下的焊缝坐标，才能做正逆运动学运算，得到各机器人对应的关节角度序列。

经过离散化和坐标系变换就可以得到机器人基坐标系下的焊缝曲线。图7为在工件坐标系下整个工作过程中处于平焊姿态的焊点坐标序列 p_C 。

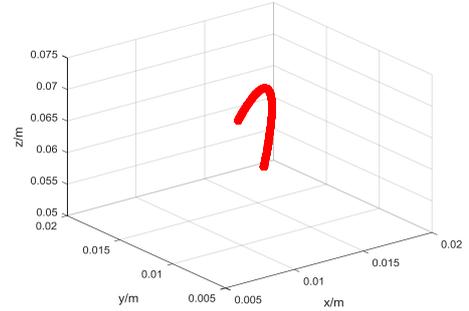


图 7: 作业过程中工件平焊位置的焊点序列

以焊接机器人为例，图8所示为在焊接机器人基坐标系下的焊点坐标序列 p_B ：

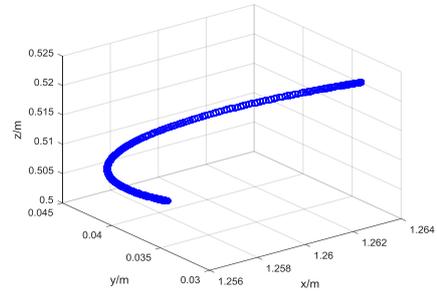


图 8: 焊接机器人基坐标系下焊点序列

3.2 初始焊接位置求取

在轨迹规划过程中以多机器人系统整体可操作度作为优化目标是期望使机器人在整个工作过程中能尽量以最优姿态或尽可能多的接近于最优姿态完成工作任务^[16]，使系统在整个任务执行过程中运动可操作度最大，从而保证整体效率最高，能量最节约^[17]。

对于不同位置的工件坐标系 $\{C\}$ ，根据式(6)-(8)计算出的相对机器人基坐标系的焊缝曲线是不一样的，也就是机器人末端走的轨迹不一样，这样代入机器人逆运动学运算的到的关节角度序列也是不同的。而选择不同的初始焊接位置，机器人有可能发生碰撞或者遇到奇异点，即使对于选取的某些初始焊接位置机器人可能按照规划好的轨迹运动，但在不同位置完成任务时具有不同的系统全局可操作度，即存在优劣之分。

协作机器人系统初始焊接位置求取要保证的整体可操作度最优，即优化目标函数为式(15)：

$$\begin{aligned} & \max_{c(x,y,z)} MMR \\ & s.t. \quad c \in S \\ & \quad \theta^- \leq \theta \leq \theta^+ \\ & \quad Rank(J(\theta)) = \min(m, n) \\ & \quad SD_{\min} = \min |p - q| > 0 \end{aligned}$$

因此求初始焊接位置的问题变成求多目标最大值的问题，搜索最优位置需要满足几个约束条件：

- (1) 初始焊接位置在协作工作空间 S 内；
- (2) 各机器人运动过程中无碰撞发生,即分离距离 $SD_{\min} > 0$, p 和 q 为空间上两物体的点；
- (3) 最终得到的关节角度序列在各个机器人关节角极限内；
- (4) 尽量远离各机器人的奇异位形,即雅可比矩阵满秩.

本文以实际实验环境所使用的埃斯顿ER16机器人为例,其D-H坐标系如图9所示,三维模型如图10所示,其D-H参数及各关节极限角度已知,则可以根据此得到机器人工作空间、正逆运动学方程和判断奇异位形.

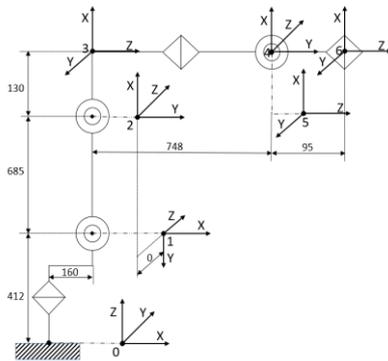


图 9: ER16机器人D-H坐标系

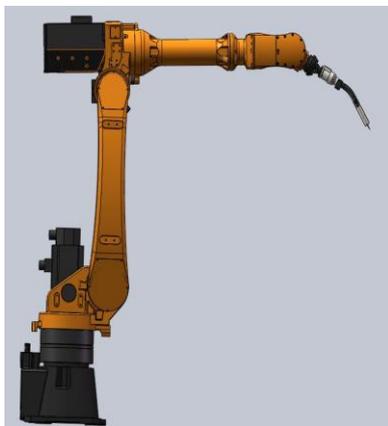


图 10: ER16机器人三维模型

3.3 遗传算法求解

本文所求的初始焊接点目标 $C(x_c, y_c, z_c)$ 实际上是一个多目标优化问题,采用遗传算法^[18]来求解最

优初始焊接位置,求解流程图如图11所示,算法的输入参数包括适应度函数约束条件,每一代选择最优个体数目,交叉概率,变异概率等,当进化迭代数目到达预设定时或者代际间平均适应度小于预设最小变化量时即退出计算完成求解.

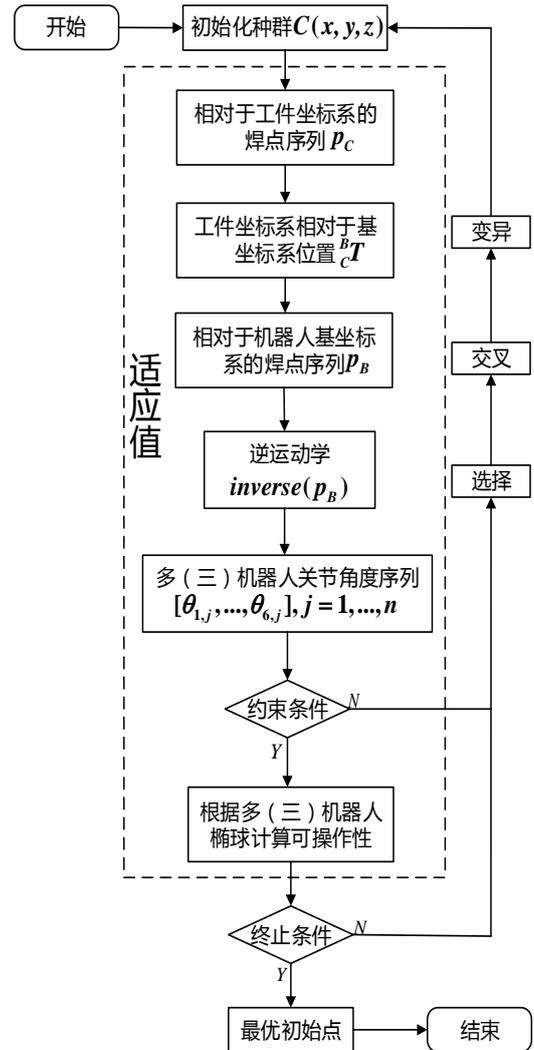


图 11: 遗传算法计算流程

算法运算过程中,需要根据3.1中的轨迹规划过程,首先将个体即待选的初始焊接位置代入式(6)-(8)得到基坐标系下的焊点序列,并调用逆运动学运算得到关节角度序列,在此过程中,根据逆运动学计算出来的关节角度序列可以判断机器人的位形是否满足几个约束条件,对于不满足的点在迭代过程中可以直接选择淘汰,满足的点可以代入式(15)求解适应度.

4 实验与结果分析

利用本文中所提出的多机器人协作焊接系统模型和遗传算法对最佳初始焊接位置进行求解,并在开发的Matlab-SimMechanics多机器人协作平台上进行仿真运行,完成指定的任务,如图12所示.

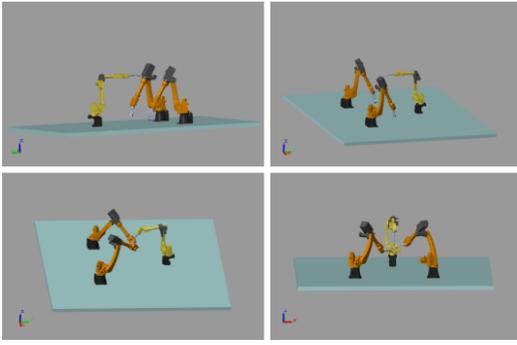


图 12: Matlab-SimMechanics 机器人仿真平台

求解中, 三机器人的基座在世界坐标系的位置分别为(单位:m):

$$\mathbf{Base1}: \{x= 1.0, y=-1.0, z=0.05\};$$

$$\mathbf{Base2}: \{x=-1.0, y=-1.0, z=0.05\};$$

$$\mathbf{Base3}: \{x= 0, y= 1.0, z= 0 \};$$

因此

$${}^B W \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

同理, 可以得到 ${}^B W^2 \mathbf{T}$ 和 ${}^B W^3 \mathbf{T}$.

以图5中马鞍形曲线为焊接任务, 算法求解最终得到最优初始焊接位置: $\mathbf{C}(0.023, -0.266, 0.404)$

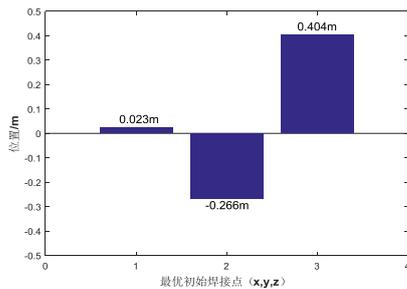


图 13: 最优个体 (初始焊接位置)

图14表示迭代过程中随着进化代数的增长, 适应度在逐渐收敛到最佳位置, 因此, 如图15所示, 每一代个体间的平均距离也是逐渐变小, 即迭代过程中越来越向最优位置靠近, 因此最终平均距离趋近于0.

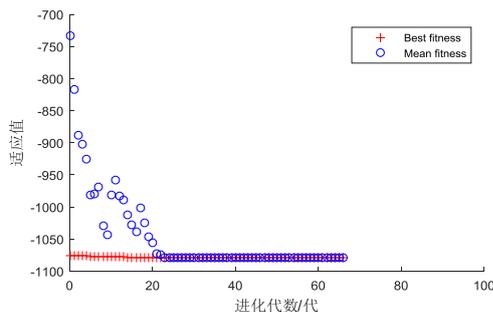


图 14: 迭代过程适应值变化与最优适应值

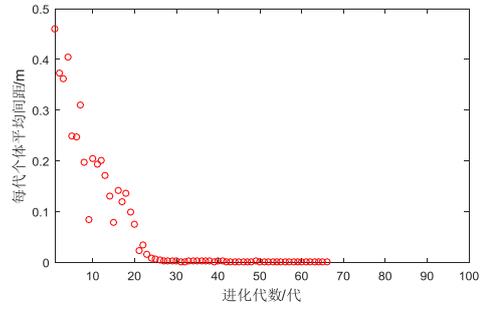


图 15: 个体间平均距离随进化代数的变化

根据所求出的初始焊接位置可以绘制出机器人协作工作过程中的整个可操作度曲线, 如图16所示.

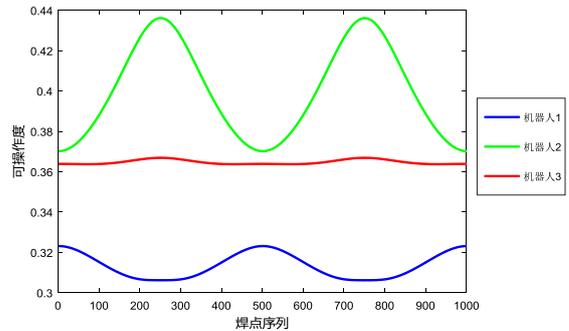
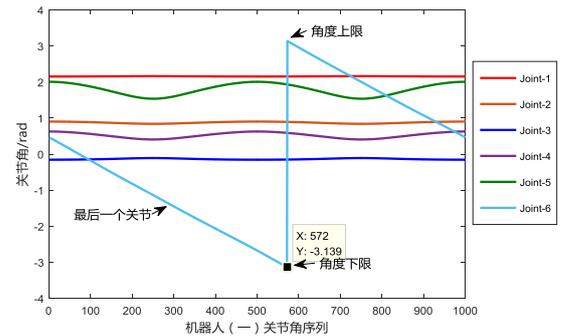
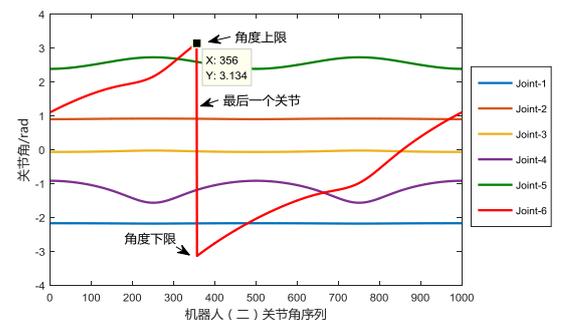


图 16: 最优初始位置时可操作度曲线

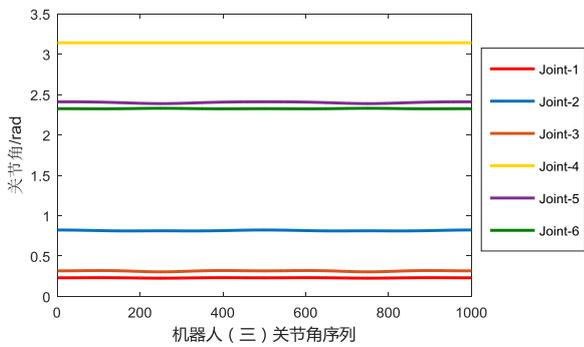
图17 (a) - (c) 为在最优初始焊接位置下计算得到的各个关节角度变化曲线, 在实际机器人工作时, 只需根据得到的关节角度序列生成作业文件发送给机器人, 就可以完成任务的执行.



(a) 机器人 (一)



(b) 机器人 (二)



(c) 机器人 (三)

图 17:各机器人关节角度变化曲线

将计算所得的最优初始焊接位置与其他非初始焊接位置进行比较可以发现,图18中的机器人可操作度曲线可以看到,第三个机器人的可操作度曲线一直接近于0,也就是接近于奇异点,此时机器人在操作空间的传速或传力性能都将大受影响。

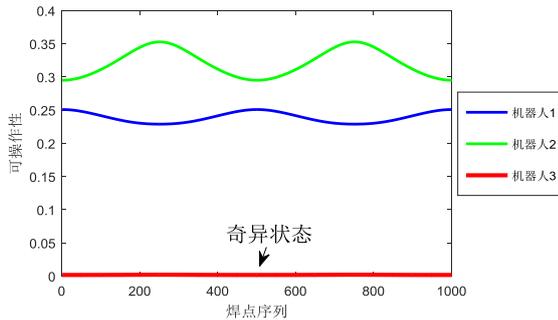


图 18: 非最优初始焊接位置 (a)

以图19中非最优初始焊接位置时,机器人整个工作过程中可操作度不稳定,也就是在实际工作过程中可能会遇到一些不可达点或发生碰撞,机器人需要突然转向或大幅度变化姿态这样的情况出现。

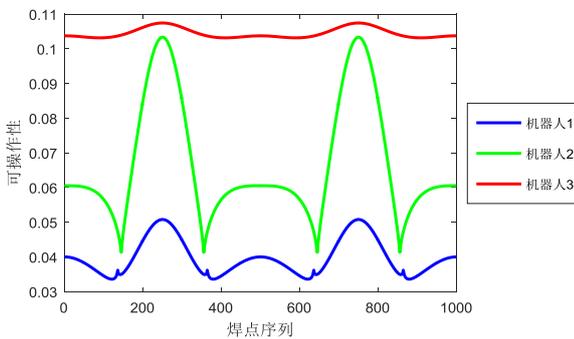


图 19: 非最优初始焊接位置 (b)

5 结论

本文在分析多机器人协作应用中运动约束关系的基础上,实现规划并协调多(三)机器人协作焊接过程中各机器人的运动轨迹.讨论了多机器人协作焊接工业应用中运动灵活性的评价方式,提出了多机器人整体可操作度的数学评价模型,并把问题转化为多目标的优化求解问题.实验结果表明,针对文中的马鞍形复杂曲线焊接任务,采用本文所使用的遗传算法来

求解得到的结果,将结果作为初始焊接位置可以成功避免机器人间碰撞、奇异点等,从而保证在执行整个任务过程中整体可操作度最大,避免了由人工示教方式指定初始焊接位置带来的不确定性。

参考文献

- [1] Santos R R D, Steffen V. Optimal Task Placement of a Serial Robot Manipulator for Manipulability and Mechanical Power Optimization [J]. *Intelligent Information Management*, 2010, 02(9):512-525.
- [2] Chettibi T, Lehtihet H E, Haddad M, et al. Minimum cost trajectory planning for industrial robots[J]. *European Journal of Mechanics*, 2004, 23(4):703-715.
- [3] Tsuneo Yoshikawa. Manipulability and Redundancy Control of Robotic Mechanisms [J]. *IEEE International Conference on Robotics & Automation*, 1985, 2: 1004-1009.
- [4] Chiacchio P, Chiaverini S, Sciavicco L, et al. Global task space manipulability ellipsoids for multiple-arm systems[J]. *IEEE Transactions on Robotics & Automation*, 1991, 7(5):678-685.
- [5] Siciliano B, Khatib O. Springer Handbook of Robotics[J]. *Springer Handbook of Robotics*, 2008, 56(8):701-718.
- [6] Sukhan Lee. Dual Redundant Arm Configuration Optimization with Task-Oriented Dual Arm Manipulability [J]. *IEEE Transactions on Robotics & Automation*, 1989, 5(1): 78-97.
- [7] 谢碧云, 赵京. 基于条件数约束的方向可操作度[J]. *机械工程学报*, 2010, 46(23):8-15..
- [8] Cong D P, From P J. Dynamic manipulability of velocity-constrained serial robotic manipulators[C]// *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics. IEEE*, 2015:299-316.
- [9] Kurazume R, Hasegawa T. A new index of serial-link manipulator performance combining dynamic manipulability and manipulating force ellipsoids [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2006, 22(5):1022-1028.
- [10] Lee S. Dual redundant arm configuration optimization with task-oriented dual arm manipulability[J]. *IEEE Transactions on Robotics & Automation*, 1989, 5(1):78-97.
- [11] Hatem Al-Dois, A. K. Jha, R. B. Mishra. Task-based Design Optimization of Serial Robot Manipulators[J]. *Engineering Optimization*, 2012, 45(6):1-12.
- [12] JYS Luh, YF Zheng. Constrained Relations between Two Coordinated Industrial Robots for Motion Control[J]. *International Journal of Robotics Research*, 1987, 6(3): 60-70.
- [13] Luh J Y S, Zheng Y F. Constrained Relations between Two Coordinated Industrial Robots for Motion Control[J]. *International Journal of Robotics Research*, 1987, 6(3):60-70.
- [14] 孟石, 戴先中, 甘亚辉. 多机器人协作系统轨迹约束关系分析及示教方法[J]. *机器人*, 2012, 34(5):546-552.
- [15] 刘迎春, 余跃庆, 姜春福. 机器人可操作性进展研究[J]. *机械设计与研究*, 19(4):34~37.
- [16] 姚建初, 丁希仑, 战强, 等. 冗余度机器人基于任务的方向可操作度研究[J]. *机器人*, 2000, 22(6):501-505.
- [17] 徐海黎, 解祥荣, 庄健, 等. 工业机器人的最优时间与最优能量轨迹规划[J]. *机械工程学报*, 2010, 46(9):19-25.
- [18] Tian L, Collins C. Motion Planning for Redundant Manipulators Using a Floating Point Genetic Algorithm[J]. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2003, 38(3):297-312.